Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по квантовой теории
Толоконникову Андрею Владимировичу

Толоконников: Вообще так-то война идёт не за Украину, а за рынки сбыта. Капиталистическим странам нужны рынки сбыта! Капитализму нужна война. И инфляция, кстати, тоже. Инфляция при капитализме – нормальное явление, и нужна для того, чтобы люди не держали у себя накопленные деньги (и не могли их положить в банк, чтобы на старости шиковать), а пускали их в оборот.

Спин – забавная тема. Вроде как мы всем примерно понимаем, что это: характеристика частицы (обычно это ½, если речь идёт о протонах-электронах и прочих нейтронах), а проекция может быть -1/2 или ½. Эта тема чуть-чуть ковыряется на ядерке, введении в кванты и атомке, но именно на квантовой теории 6 семестра мы уже достаточно круты, чтобы научиться решать задачу на эту тему.
Спин – самая сложная тема в Квантовой Теории 6-го семестра, отнеситесь к ней серьёзно.

Напомню немного теории. ВФ спиновой частицы записывается как производение координатной функции (КФ) на спиновой столбец:

$$\Psi(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

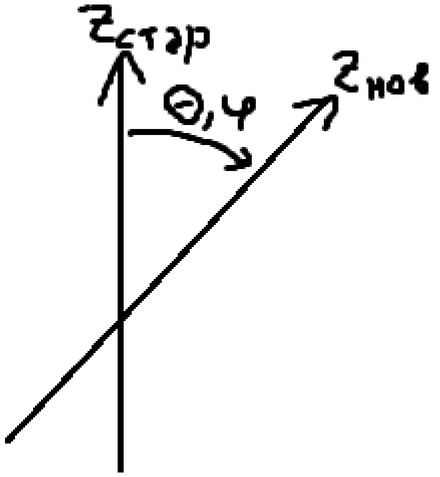
Привычные нам операторы (координаты, импульса, гамильтониан, момента импульса, $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$) действуют только на пространственную составляющую, оставляя спиновый столбец неизменным.
Матричные операторы (вроде матриц Дирака и их производным), напротив, считают Ψ(x,y,z) постоянным множителем, а меняют числа в столбце (мы увидим в дальнейшем, как они работают). За счёт того, что КФ Ψ(x,y,z) будет постоянным коэфом, а все уравнения линейными, мы можем везде на КФ сокращать, и работать только со спиновым столбцом.

Поэтому нам в условиях задачи и будут давать только этот самый спиновый столбец $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$- потому что именно на него будут действовать все спиновые операторы.

А что такое эти числа a и b какой у них физический смысл?

Пусть у нас есть сферическая СК. Вообще в каждой сферической СК числа в столбце будут свои. Пускай в нашей они равны a и b Тогда:
$|a|^2$ – вероятность измерить значение проекции спина на ось Z +1/2
$|b|^2$ – вероятность измерить значение проекции спина на ось Z -1/2
(При этом в каждой СК оказывается, что $|a|^2+|b|^2=1$ – естественно, сумма вероятностей всегда =1. Или ½, или -1/2 – третьего не дано!).

А что, если нам нужно измерить проекцию спина на другую ось – не ось Z? Очевидно, нужно повернуть СК так, чтобы новая ось Z совпала с осью, где мы хотим измерить проекцию.
Поворот определяется двумя углами, θ, φ:



А как же преобразуется спиновой столбец? Он матрично умножается на матрицу поворота. Вот он:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Давайте вспомним, как действует матрица на вектор: они матрично перемножаются (помните правило «строка на столбец» с 1 курса?)

Посмотрите, какой будет результат:

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta & be^{-i\varphi}\sin\theta \\ ae^{i\varphi}\sin\theta & -b\cos\theta \end{pmatrix}$$

Сверху будет вероятность того, что измеренная проекция спина будет ½, снизу = -1/2.

Упражнение. В некой сферической СК спиновый столбец имеет вид $(\frac{3i/5}{4/5})$. Найдите вероятности измерить каждую проекцию спина на ось абсцисс, а также среднее значение проекции там же.

Решение. Сначала определяем θ и φ. Чтобы от оси аппликат перейти к оси абсцисс, нужно повернуться по θ на π/2 и по φ на 0. Таким образом, θ=π/2, φ=0.
Матрица поворота тогда будет равна (подставляем cos θ=0, sin θ=1, $e^{i\varphi}=1$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И матрично умножим на $(\frac{3i/5}{4/5})$. Получим $(\frac{4/5}{3i/5})$ - спиновый столбец перевернулся.
Вероятность получить +1/2 будет $(4/5)^2=16/25$
Вероятность получить -1/2 будет $(3/5)^2=9/25$
Среднее значение будет матожидание: ½*16/25-12*9/25=7/25.

А для оси Y, кстати, будет θ=π/2=φ, поэтому матрица примет вид (напомним, что $e^{i\pi/2}=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)=i$, $e^{-i\pi/2}=-i$):

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

И мы получим уже спиновый столбец $\left(\frac{-4i/5}{-3/5}\right)$.

Кстати, эти матрицы

А теперь давайте решим задачу с зачёта. Она есть в парфёновском списке:

32. Проекция спина электрона на ось z равна +1/2. Какова вероятность обнаружить ориентацию спина вдоль или против оси, составляющей с осью z угол θ?

Сперва соображаем, какой спиновый столбец в исходной СК. Очевидно, $\left(\frac{1}{0}\right)$ - мы точно знаем, что проекция спина в той СК 100% ½ и 0% -1/2.

Теперь мы можем на него подействовать матричным оператором поворота. θ нам дано, а φ, по-видимому, 0. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\left(\frac{1}{0}\right) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Т.е. вероятность измерить +1/2 будет $\cos^2\theta$, а вероятность измерить -1/2 будет $\sin^2\theta$.

Как насчёт решения ещё одной парфёновской задачи с зачёта?

34. Прибор Штерна-Герлаха разделяет пучок частиц спина ½ в зависимости от проекции спина на ось $\vec{n}(\vartheta,\varphi)$. Найти отношение интенсивностей пятен на экране, если спиновое состояние частиц пучка:

а) описывается ВФ $\chi = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}$;

Так, у нас спиновой столбец, у нас есть θ и φ – просто не думая, матрично умножаем:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1-i \\ 2+i \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} (1-i)\cos\theta + (2+i)e^{-i\varphi}\sin\theta \\ (1-i)e^{i\varphi}\sin\theta - (2+i)\cos\theta \end{bmatrix}$$

Чтобы найти вероятности, нужно каждое из двух чисел в получившемся спиновом столбике возвести в квадрат, да ещё взять по модулю.

$$p_{1/2}=|(1-i)\cos\theta+(2+i)e^{-i\varphi}\sin\theta)|^2/49=$$

(далее следует 100500 выкладок, где я попытался упростить выражение)

$=|(1-i)\cos\theta+(2+i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sin\theta)|^2/49=$

$=|(1-i)\cos\theta+(2\cos\varphi+2\sin\varphi\ \ +i(\cos\varphi-\sin\varphi)\sin\theta)|^2/49=$

$=|(\cos\theta+(2\cos\varphi+2\sin\varphi)\sin\theta+i(-\cos\theta+(\cos\varphi-\sin\varphi)\sin\theta)|^2/49=$

$=\{[(\cos\theta+(2\cos\varphi+2\sin\varphi)\sin\theta]^2+[-\cos\theta+(\cos\varphi-\sin\varphi)\sin\theta]^2\}/49=$

$=\{[(\cos\theta+(2\cos\varphi+2\sin\varphi)\sin\theta]^2+[-\cos\theta+(\cos\varphi-\sin\varphi)\sin\theta]^2\}/49=$

$=\{\cos^2\theta+4(\cos\varphi+\sin\varphi)\cos\theta\sin\theta+4(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\sin^2\theta+\cos^2\theta+2(\cos\varphi$ $-\sin\varphi)\cos\theta\sin\theta+$

$+4(\cos\varphi-\sin\varphi)^2\sin^2\theta\}/49=$

$=\{2\cos^2\theta+(6\cos\varphi+2\sin\varphi)\cos\theta\sin\theta+8\sin^2\theta\}/49=$

$=2/49*\{\cos^2\theta+(3\cos\varphi+\sin\varphi)\cos\theta\sin\theta+4\sin^2\theta\}$
(Чёт я не уверен, что стало проще… ну да ладно).
Обозначим это выражение за $p_{1/2}$.

Так вот, это – вероятность того, что электрон будет иметь проекцию спина на ось (θ, φ), равную ½. Вероятность иметь проекцию -1/2 будет, как вы догадываетесь, 1- $p_{1/2}$.

Электроны, имеющие проекцию спина ½, угодят в одно место, имеющие -1/2 – в другое.
Отношение интенсивностей – это отношение числа попавших электронов в место, куда попадают с ½, к числу попавших электронов в место, куда попадают с -1/2, т.е. $p_{1/2}/(1-p_{1/2})$.
Гыыы, вот и ответ.

Довольно часто можно встретиться с формулировками «спин направлен под углом к такой-то оси». Что это значит и как с этим работать?
Разберёмся сначала с осью z.
Напомню, что у нас есть спиновый столбец (спинор) из двух комплексных чисел:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Где $|a|^2$ – вероятность получить проекцию на ось z =+1/2, $|b|^2$ – вероятность получить проекцию на ось z =+1/2. Обозначим $|a|^2$ как $p_{1/2}$, а $|b|^2$ как $p_{-1/2}$.
Тогда матожидание (оно же средним значением проекции спина) будет

$$< s_z > = \frac{1}{2}p_{1/2} + (-\frac{1}{2})p_{-1/2}$$

Разумеется, оно всегда будет лежать между -1/2 (в случае $p_{1/2} = 0, p_{-1/2} = 1$) и ½ (в случае $p_{1/2} = 1, p_{-1/2} = 0$) .
Косинусом угла проекции спина на ось z называют отношение $\frac{<s_z>}{\frac{1}{2}}$.
Откуда оно взялось? ½ - это весь спин электрона, а $< s_z >$ - его зетовая проекция.

Задача 1. Спинор имеет вид

$$\begin{matrix} \frac{5i}{13} \\ \frac{12}{13} \end{matrix}$$

Под каким углом к оси z он направлен?
Решение. Ищем среднюю проекцию на ось z $< s_z >$:

$$< s_z > = \frac{1}{2}p_{1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right)p_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} * \frac{25}{169} + \left(-\frac{1}{2}\right) * \frac{144}{169} = -\frac{-109}{169 * 2}$$

А теперь, зная среднюю проекцию и полный спин (1/2), находим косинус угла:

$$\cos\alpha = \frac{< s_z >}{\frac{1}{2}} = -109/169$$

$$\alpha = \arccos(\frac{109}{169})$$

Задача решена.

Упражнение читателю, если он хочет потренироваться. Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ортогонален оси аппликат.

Задача 2.

Спин электрона ориентирован под углом 30° к оси z. Вероятность того, что при измерении $\hat{s}_z$ будет получено значение -½, примерно равна:

На этот раз явный вид спинового столбца нам не дан, нам нужно самим догадываться. Но зато дан угол. Это означает, что мы можем записать

$$\cos 30° = \frac{< s_z >}{\frac{1}{2}} => < s_z > = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

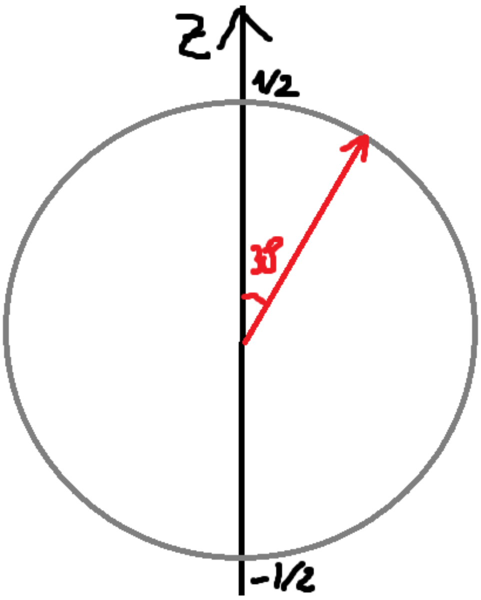
А теперь

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = < s_z > = \frac{1}{2}p_{1/2} + (-\frac{1}{2})p_{-1/2}$$

От нас хотят вероятность измерить -1/2, т.е. $p_{-1/2}$. $p_{1/2}$ через неё выражается: $p_{1/2} = 1 - p_{-1/2}$. Подставляем:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}(1 - p_{-1/2}) + (-\frac{1}{2})p_{-1/2}$$

Решая это уравнение, получим $p_{-1/2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, что чуть меньше 0,067. Такая малая вероятность – менее 7%! Но у этого есть физический смысл: Ведь исходно спинор был направлен под углом $30°$ к оси аппликат:



Как вы видите, спинор «тяготеет» к ½ гораздо сильнее, чем к -1/2. Если бы угол был бы не 30 °, а 0 ° - то $p_{-1/2}$ была бы вообще 0, в 100% случаях измерялось бы значение ½.

Мы обсудили всё насчёт проекций на ось z. А что осей насчёт x и y? Как нам измерить угол спинора с этими осями?
Ну у нас же есть матрица поворота
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
Подействуем на спиновой столбец, получим новый столбец, но там уже $|s_1|^2 = p_{1/2}$ будет вероятность измерить ½ на ось (θ,φ), а $|s_2|^2 = p_{-1/2}$ будет вероятность измерить -½ на ось (θ,φ). Так и можно измерять средние значения проекций и углы между спинором и произвольным направлением.